Laten zien dat het niet past

Stefan van Zwam
Technische Universiteit Eindhoven

12 maart 2009

Wat groepen zijn voor symmetrie, zijn matroïden voor onafhankelijkheid. Een *matroïde* bestaat uit een eindige verzameling E, en een verdeling van de deelverzamelingen van E in *afhankelijke* en *onafhankelijke* verzamelingen. Deze verdeling voldoet aan wat voorwaarden. Zo is een deelverzameling van een onafhankelijke verzameling weer onafhankelijk. E kan bijvoorbeeld bestaan uit een collectie vectoren, waarbij de onafhankelijke deelverzamelingen *lineair* onafhankelijk zijn. We zeggen dat een matroïde *representeerbaar* is over een lichaam $\mathbb{F}$ als er inderdaad een verzameling vectoren in $\mathbb{F}^n$ bestaat die precies de voorgeschreven afhankelijkheden heeft.

Zo'n concrete verzameling vectoren toont aan dat een matroïde representeerbaar is over $\mathbb{F}$, maar hoe toon je nu aan dat een matroïde *niet* representeerbaar is? Een populair middel binnen de matroïdentheorie is overgenomen van de grafentheorie: de *verboden minor*. Als een matroïde representeerbaar is over $\mathbb{F}$ en je laat een element weg, dan is het resultaat natuurlijk ook weer representeerbaar. Er bestaat nog een operatie, samentrekking genaamd, die eveneens representeerbaarheid behoudt. Een verboden minor is nu een matroïde die zelf niet representeerbaar is over $\mathbb{F}$, maar waarvoor elke samentrekking of weglating een matroïde oplevert die wel representeerbaar is.

Elke matroïde die niet representeerbaar is over $\mathbb{F}$ kan gereduceerd worden tot zo'n verboden minor. Het is daarom interessant om de complete lijst verboden minoren voor representeerbaarheid over $\mathbb{F}$ te kennen. Dit is een lastig probleem, dat tot op heden alleen opgelost is voor de eindige lichamen GF(2), GF(3) en GF(4).

Het is even interessant om je af te vragen of een matroïde representeerbaar is over een grote verzameling lichamen tegelijk. Samen met Rhiannon Hall en Dillon Mayhew heb ik onlangs het volgende aangetoond:

Stelling. *De verzameling matroïden die representeerbaar is over elk lichaam, behalve eventueel* GF(2)*, wordt gekarakteriseerd door eindig veel verboden minoren.*

In deze voordracht zal ik een indruk geven van de technieken die voor het bewijs nodig zijn, waaronder algebra, grafentheorie, combinatoriek en kruisverhoudingen uit de projectieve meetkunde.